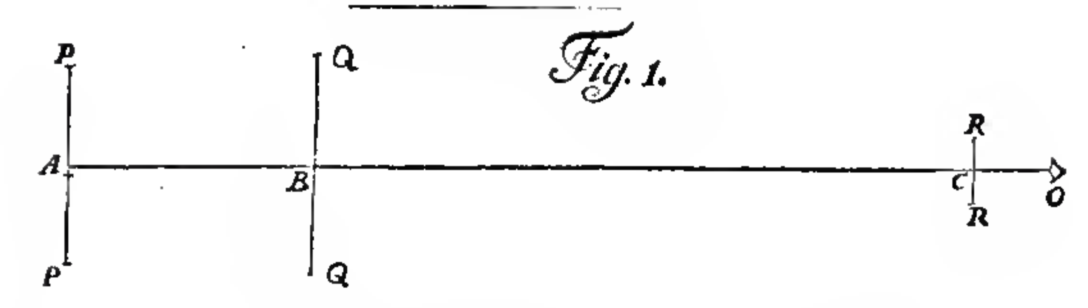
RECHERCHES
SUR LES LUNETTES A' TROIS VERRES QUI REPRÉSENTENT LES OBJETS RENVERSÉS.

PAR M. EULER.



I.

Après avoir expliqué les principes généraux, ſur lesquels doit être établie la conſtruction tant des Teleſcopes que des Microſcopes, je me propoſe ici d'en faire l'application aux Lunettes compoſées de trois verres. De telles Lunettes étant déjà aſſez en uſage depuis qu'on leur a reconnu quelques avantages ſur celles de deux verres, on ſera peut-être ſurpris du haut degré de perfection, dont elles ſont ſuſceptibles, tant par leur arrangement, que par leur figure. Je ne conſidére ici que trois verres ſimples PP, QQ, & RR, dont les Lunettes ſoient compoſées, desquels le premier PP ſoit tourné vers l'objet, que je regarde comme infiniment éloigné, & qu'on nomme l'objectif, & le dernier RR vers l'œil en O. Fig. 1.

II. Puisqu'il eſt ici queſtion des Lunettes, & que la diſtance de l'objet, qui a été nommée $= a$, eſt ſuppoſée infinie, on doit mettre

ore $l = a$, dans mes formules générales, & Φ marquera le demi-diametre de l'eſpace circulaire, que la lunette découvre dans le ciel; & qu'on nomme le champ apparent. Or chaque verre ſe rapportant à deux diſtances, dont l'une eſt celle de l'objet, ou de l'image, dont il reçoit les rayons, & l'autre celle de l'image repréſentée par ce verre, il convient d'introduire dans le calcul pour chaque verre ces deux diſtances; qu'on peut nommer les diſtances déterminatrices de chaque verre. Soit donc

Pour le I verre PP

la diſtance de l'objet avant le verre $= a = \infty$,
la diſtance de l'image après le verre $= \alpha$.

Pour le II verre QQ

la diſtance de l'image précédente avant ce verre $= b$,
la diſtance de l'image formée après ce verre $= \beta$.

Pour le III verre RR

la diſtance de l'image précédente avant ce verre $= c$,
la diſtance de l'image formée après ce verre $= \gamma = \infty$.

III. Ayant fixé pour chaque verre ces deux diſtances déterminatrices, on en connoit d'abord les intervalles entre les verres, qui ſeront $AB = \alpha + b$ & $BC = \beta + c$, auxquelles on doit ajouter la diſtance de l'œil $CO = k$, & il eſt évident que ces trois diſtances doivent être poſitives. Enſuite j'ai mis pour abréger $\frac{\alpha}{a} = A$, $\frac{\beta}{b} = B$, & $\frac{\gamma}{c} = C$.

d'où pour le cas préſent nous aurons $A = 0$ & $C = \infty$. De là on connoîtra auſſi promptement les diſtances de foyer de ces verres, qui ſeront exprimées en ſorte

la diſtance de foyer du verre PP $= p = \frac{a\alpha}{a+\alpha} = \alpha$

la diſtance de foyer du verre QQ $= q = \frac{b\beta}{\beta+b} = \frac{Bb}{1+B}$

la diſtance de foyer du verre RR $= r = \frac{c\gamma}{c+\gamma} = c$.

IV.

IV. Donc reciproquement, quand on connoit les diſtances de foyer p, q, r des verres avec les rapports de leurs diſtances déterminatrices A, B, C, desquelles $A = 0$ & $C = \infty$, on aura ces diſtances mêmes, comme il ſuit :

$$a = \infty\,;\ \alpha = p\,;\ b = \frac{1+B}{B}q\,;\ \beta = (1+B)q\,;\ c = r\,;\ \gamma = \infty.$$

Je regarde ici les diſtances de foyer p, q, r comme poſitives, ou les verres comme convexes ; or ſi dans la ſuite quelquune de ces diſtances ſe trouve négative, ce ſera une marque, que ce verre doit être concave. Or j'ai trouvé moyen de n'introduire dans mes formules générales, que les diſtances de foyer p, q, r avec les lettres A, B, C, & de là les intervalles entre les verres ſeront déterminés en ſorte $AB = p + \frac{1+B}{B}q$ & $BC = (1+B)q + r$,

& partant la longueur de toute la lunette ſera

$$AC = p + \frac{(1+B)^2}{B}q + r.$$

V. Or quoique la diſtance de foyer d'un verre ſoit donnée, on peut aſſigner une infinité de figures différentes toutes ſphériques, qui produiſent la même diſtance de foyer : car ſi la diſtance de foyer doit être $= p$, & que nous poſions le rayon de ſa face de devant $= f$, & celui de ſa face de derrière $= g$, on ſatisfait à la condition du foyer en prenant $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{20}{11p}$, ou $\frac{fg}{f+g} = \frac{11}{20}p$: de ſorte que l'un ou l'autre de ces deux rayons f & g puiſſe être pris à volonté. Tous ces verres ayant la même diſtance de foyer ſatisferont auſſi aux mêmes diſtances déterminatrices : & s'il n'étoit question, que du lieu des images, il ſeroit indifférent, laquelle de cette infinité de figures indifférentes on donneroit au verre. Mais ces figures ſont bien différentes par rapport à la confuſion cauſée dans la repréſentation de l'image, & c'eſt de cette circonſtance, qu'il faut déterminer dans chaque cas la figure la plus convenable.

VII. J'ai employé dans mes formules générales les caracteres λ, λ', λ'', &c. pour exprimer la confusion causée par les verres PP, QQ, RR; où il faut remarquer que les valeurs de ces lettres ne sauroient jamais devenir moindres que l'unité. Dans ce cas la confusion est la plus petite, & il n'y a alors qu'une seule figure du verre, qui produise cet avantage. Toute autre figure qu'on donne à un verre, produira une plus grande confusion, & la lettre λ, qui lui appartient, sera plus grande que l'unité. Or réciproquement la valeur de λ étant donnée, pourvu qu'elle soit plus grande que l'unité, on peut assigner deux figures aux verres, qui produisent le même degré de confusion, les deux distances déterminatrices étant données. Ainsi, pour le verre objectif, dont les distances déterminatrices sont $a = \infty$, & $\alpha = p$, la distance de foyer étant $= p$, afin que la lettre λ convienne à sa confusion, il faut qu'il soit

le rayon de sa face de devant $= \dfrac{p}{1{,}62740 \pm 0{,}90513\sqrt{(\lambda-1)}}$

le rayon de sa face de derrière $= \dfrac{p}{0{,}19078 \mp 0{,}90513\sqrt{(\lambda-1)}}$.

VII. Pour le second verre QQ, dont les distances déterminatrices sont b & β, & la distance de foyer $= q$, afin que le nombre λ' convienne à sa confusion, posant $\dfrac{\beta}{b} = B$, il faut prendre

le rayon de sa face

de devant $= \dfrac{(1+B)\,q}{1{,}62740 + 0{,}19078\,B \pm 0{,}90513(1+B)\sqrt{(\lambda'-1)}}$

de derrière $= \dfrac{(1+B)\,q}{1{,}62740\,B + 0{,}19078 \mp 0{,}90513(1+B)\sqrt{(\lambda'-1)}}$.

De la même maniere, pour le troisième verre RR, dont les distances déterminatrices sont $c = r$ & $\gamma = 0$, la distance de foyer étant $= r$, à cause de $\dfrac{\gamma}{c} = C = \infty$, afin que le nombre λ'' convienne à sa confusion, il faut prendre

le

le rayon de ſa face de devant $= \frac{r}{0,19078 \pm 0,90513\sqrt{(\lambda''-1)}}$

le rayon de ſa face de derrière $= \frac{r}{1,62740 \mp 0,90513\sqrt{(\lambda''-1)}}$.

VIII. Outre ces déterminations, qui regardent le lieu, la diſtance de foyer, & la figure des verres, il faut auſſi avoir égard à leurs ouvertures. Soit donc le demi-diametre de l'ouverture du verre objectif $= x$; or pour les autres verres je poſe le demi-diametre

de l'ouverture du ſecond verre QQ $= \theta q$,

de l'ouverture du troiſième verre RR $= \theta' r$,

où il faut remarquer, qu'on ne ſauroit donner à chaque verre une plus grande ouverture, que ſes faces permettent; il faut pour cet effet ſe régler ſur ſa face la plus courbe, & faire en ſorte que le demi-diametre de ſon ouverture ne ſurpaſſe point la moitié du rayon de cette face; afin que l'ouverture n'embraſſe point des arcs plus grands que 60°. Il ſera même bon de rendre ces arcs encore plus petits, & de ne donner au demi-diametre de l'ouverture que le tiers ou le quart du rayon de la face la plus courbe.

IX. Que le nombre m exprime maintenant la multiplication dont on veut que la lunette groſſiſſe les objets: & pour le degré de clarté ſoit y le demi-diametre des pinceaux lumineux, qui ſont transmis dans l'œil de chaque point de l'objet. Où il faut remarquer que la valeur $y = \frac{1}{50}$ pouce fournit encore un très grand degré de clarté, & qu'on ſe contente communément d'un plus petit, qui répond à $y = \frac{1}{70}$. Or le degré de clarté y avec la multiplication m étant donné, cela détermine d'abord le demi-diametre de l'ouverture de l'objectif $x = my$: donc, prenant $y = \frac{1}{50}$ pouce, on aura

$x =$

$x = \frac{m}{50}$ pouces, & en ne prenant que $y = \frac{1}{70}$ pouce, on aura $x = \frac{m}{70}$ pouces. De là il s'enſuit d'abord, que les rayons des faces de l'objectif doivent abſolument être plus grands que $2x$, ou bien ſelon les remarques rapportées, plus grands que $3x$, ou même que $4x$.

X. Or, afin que tous les rayons qui entrent par l'objectif, ſoient auſſi tranſmis par les deux autres verres, il faut que leurs ouvertures paſſent de certaines limites, que j'ai rapportées dans la ſeconde régle des inſtructions générales. Puiſque $Aa = p$ & $C = \infty$, cette régle fournit les conditions ſuivantes :

$$\theta > \frac{B+1}{B} \cdot \frac{x}{p} \quad \& \quad \theta' > \frac{1}{B} \cdot \frac{x}{p},$$

où il s'agit uniquement de la quantité abſolue de ces expreſſions ſans avoir égard à leurs ſignes. Or il faut remarquer, que quand même les verres ont une telle figure, qui ſoit ſuſceptible de la plus grande ouverture, ce qui arrive lorſque les deux faces ſont égales, la valeur des nombres θ & θ' eſt au deſſous de $\frac{1}{2}$, ou même de $\frac{1}{3}$, & de $\frac{1}{4}$: d'où l'on voit que la valeur du nombre B ne ſauroit être priſe beaucoup moindre que l'unité.

XI. On tâchera de procurer à ces deux fractions θ & θ' des valeurs auſſi grandes qu'il eſt poſſible, puiſque c'eſt d'elles que dépend principalement le champ apparent, dont je ſuppoſe le demi-diametre $= \Phi$. L'une ou l'autre concourt toujours tout entiere à déterminer le champ apparent : mais l'autre n'y contribue ſouvent qu'en partie, & quelquefois elle diminue même l'effet de l'autre. Pour tenir compte de cette circonſtance, j'introduis au lieu des lettres θ & θ' d'autres π & π', dont l'une ſoit égale à ſa correſpondente; & l'autre ne ſurpaſſe point la ſienne. Cela poſé, puiſque j'ai ici en vue la repréſentation renverſée, on pourra procurer à la lunette un champ apparent

rent donné, savoir qu'il soit $\Phi = \frac{\pi + \pi'}{m + 1}$: d'où l'on voit que le demi-diametre du champ apparent ne sauroit jamais surpasser cette quantité $\frac{\theta + \theta'}{m + 1}$; mais on le peut faire aussi petit qu'on voudra.

XII. Or, ayant fixé les valeurs de π & π', & déterminé la distance de foyer p du verre objectif avec le nombre B, on aura pour la construction de la lunette les formules suivantes

$$b = \frac{(B+1)\Phi}{B\pi - (B+1)\Phi}p\,; \quad \beta = Bb\,; \quad q = \frac{Bb}{B+1}$$

$$c = r = \frac{-B\Phi}{\pi' + \pi - \Phi}p = -\frac{Bp}{m},$$

d'où l'on tire les distances des verres

$$AB = \alpha + b = \frac{B\pi}{B\pi - (B+1)\Phi}p$$

$$BC = \beta + c = \frac{B(B+1)\Phi}{B\pi - (B+1)\Phi}p - \frac{B}{m}.$$

Or pour la distance de l'œil $CO = k$, on aura

$$k = -\frac{\pi' cc}{B\Phi p} = -\frac{\pi' Bp}{\Phi mm} = +\frac{\pi'}{\Phi}\cdot\frac{r}{m}$$

laquelle avec les deux précédentes doit être positive.

XIII. Il faut donc commencer par remplir ces trois conditions :

$$\text{I.} \quad \frac{B\pi}{B\pi - (B+1)\Phi}p > 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{B\Phi\,[(B+1)\pi' + \pi]}{[B\pi - (B+1)\Phi]\,(\pi' + \pi - \Phi)}p > 0$$

& $\quad \text{III.} \quad -\frac{B\Phi}{\pi'}p > 0.$

Or

Or la seconde divisée par la première doit aussi être positive, donc

$$\frac{\phi[(B+1)\pi'+\pi]}{\pi(\pi'+\pi-\phi)} = \frac{(B+1)\pi'+\pi}{m\pi} > 0$$

dont on peut se servir au lieu de la seconde. Si l'on veut éviter la confusion, qui résulte de la diverse réfrangibilité des rayons, on n'a qu'à satisfaire à cette équation :

$$\frac{(B+1)\pi}{B\pi-(B+1)\phi} + \frac{\pi'}{m\phi} = 0\,;$$

mais il suffit que cette quantité soit fort petite.

XIV. Or le principal objet, auquel nous devons fixer notre attention, c'est la confusion causée par l'ouverture des verres, laquelle posant pour abréger :

$$\mu = 0{,}93819 \quad \& \quad \nu = 0{,}23269$$

s'est trouvée exprimée en sorte :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\pi(B+1)^2\phi[\lambda'(B+1)^2+\nu B]}{B^3[B\pi-(B+1)\phi]} - \frac{\lambda''}{B^3 m}\right)$$

dont la valeur, afin que la confusion soit insensible, doit être moindre que $\frac{\mu}{4\cdot 30^3}$. Ici il est clair combien la figure des verres, ou les nombres λ, λ', λ'' influent sur la confusion de la lunette ; & on comprend qu'on ne sauroit parvenir à un plus haut degré de perfection, qu'en déterminant les élémens de cette expression en sorte qu'elle évanouïsse tout à fait. Voyons donc s'il est possible d'arriver à ce but.

XV. Pour obtenir un grand champ apparent, il faut donner aux lettres π & π' des valeurs positives, & aussi grandes qu'il est possible ; partant les quantités π, π', ϕ & m étant positives, il faut en vertu de la troisième condition que $-Bp$ soit une quantité positive. Donc, ou le nombre B, ou la distance de foyer p du verre objectif

jectif doit être négative. Cependant, quand même la distance de l'œil $CO = k$ deviendroit négative, la lunette ne seroit pas tout à fait à rejetter, mais on auroit un cas semblable aux lunettes à deux verres, dont l'oculaire est concave; où il faudroit appliquer l'œil immédiatement au verre oculaire RR. Mais dans ce cas on ne jouira point du champ apparent, que la valeur de Φ indique; mais il dépendra de l'ouverture de la pupille, dont si nous posons le demi-diametre $= \omega$, le demi-diametre du champ apparent sera $= \frac{\omega(\pi' + \pi - \Phi)}{B\pi' p}$, qui à cause de $\pi' + \pi - \Phi = m\Phi$ est $= \frac{m\Phi}{B\pi'} \cdot \frac{\omega}{p}$. Comme ce cas est tout particulier, je le déveloperai ensuite séparément.

XVI. Mais, en supposant la distance $CO = k$ positive, nous avons deux cas à considérer, selon que le nombre B est négatif, ou la distance de foyer p. J'ai déjà remarqué (10.) que le nombre B ne sauroit évanouïr, ou être pris extrèmement petit: donc, soit que ce nombre soit positif ou négatif, il faut exclure le cas, où il seroit trop petit. Mais je ne suivrai pas cette distinction tirée de la nature du nombre B, il conviendra plutôt de diriger nos recherches suivant la grandeur du champ apparent, pour lequel ayant $\Phi = \frac{\pi + \pi'}{m + 1}$, je donnerai successivement à π des valeurs croissantes depuis o jusqu'à la plus grande $\pi = \theta$, & ensuite on pourra faire de semblables hypotheses pour π', où il faut remarquer, que, si $\pi < \theta$ on aura $\pi' = \theta'$, & réciproquement, si $\pi' < \theta'$, il faut qu'il soit $\pi = \theta$.

PREMIERE HYPOTHESE
où $\pi = 0$ & $\pi' = \theta'$.

Dans ce cas le demi-diametre du champ apparent sera $\Phi = \frac{\theta'}{m+1}$, & partant le même que si la lunette étoit composée de deux verres.

 Aussi

Auſſi l'intervalle entre le premier & le ſecond verre AB évanouït-il, de ſorte que ces deux verres enſemble ne conſtituent que quaſi un ſeul : ces lunettes auront auſſi les mêmes propriétés que celles de deux verres, avec cette différence pourtant, que la confuſion peut être rendue beaucoup plus petite, & même évanouïſſante. Puiſque donc $\pi = o$ & $\frac{\pi'}{\varphi} = m + 1$, nous aurons les déterminations ſuivantes

$$b = -p \;;\; \beta = -Bp \;;\; q = -\frac{Bp}{B+1}$$

$$c = r = -\frac{Bp}{m} \quad \& \quad k = \frac{m+1}{m}r, \qquad \text{enſuite}$$

$$AB = o \;;\; BC = -Bp - \frac{Bp}{m} = -\frac{(m+1)B}{m}p.$$

Il faut donc que Bp ſoit une quantité négative, & les autres conditions ſont $\theta > \frac{B+1}{B} \cdot \frac{x}{p}$ & $\theta' > \frac{1}{B} \cdot \frac{x}{p}$.

Pour la confuſion elle ſera exprimée en ſorte :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{(B+1)[\lambda'(B+1)^2 + \nu B]}{B^3} - \frac{\lambda''}{B^3 m}\right),$$

& dans ce cas il eſt impoſſible de ſatisfaire à la condition qui anéantit la confuſion cauſée par la diverſe réfrangibilité des rayons. Nous avons ici deux cas à diſtinguer, l'un ou le nombre B eſt négatif, & la diſtance de foyer p poſitive ; & l'autre, où le nombre B eſt poſitif, & la diſtance de foyer p négative.

Premier cas, p *poſitif* & B *négatif*.

Pour le premier ſoit $B = -\frac{1}{n}$, pour avoir :

$$b = -p \;;\; \beta = \frac{p}{n} \;;\; q = \frac{p}{n-1} \;;\; r = \frac{p}{mn} \;;\; k = \frac{m+1}{m}.r \;;$$

$$AB = o \;;\; BC = \frac{(m+1)p}{mn} \;;\; \theta > (n-1)\frac{x}{p} \;;\; \theta' > n.\frac{x}{p}, \quad \&$$

& la confuſion ſera :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \lambda'(n-1)^3 - \nu n(n-1) + \frac{\lambda'' n^3}{m}\right),$$

où il faut voir, quelle valeur on doive donner au nombre n, afin que que cette quantité évanouïſſe, ou en cas que cela ne ſoit pas poſſible, qu'elle devienne la plus petite.

Ici on voit d'abord, que, ſi l'on poſoit $n = 0$, il ſeroit aiſé de faire évanouïr la confuſion ; car, puisqu'elle ſeroit $= \frac{\mu m x^3}{4p^3}(\lambda - \lambda')$, on n'auroit qu'à prendre $\lambda = 1$ & $\lambda' = 1$, ou en général $\lambda' = \lambda$. Mais dans ce cas la longueur de la lunette deviendroit infinie, de même que la diſtance de foyer du verre oculaire RR ; ce qui rend ce cas inutile dans la pratique. Il faut donc ſuppoſer n plus grand que zero, d'où nous tirons les eſpeces ſuivantes.

I Eſpece poſant $n = \frac{1}{4}$.

La confuſion étant $= \frac{\mu m x^3}{4p^2}\left(\lambda - \frac{27}{64}\lambda' + \frac{3}{16}\nu + \frac{\lambda''}{64m}\right)$, évanouira en prenant

$$\lambda' = \frac{64\lambda + 12\nu + \frac{\lambda''}{m}}{27},$$

où il eſt évident qu'on doit prendre $\lambda = 1$, & $\lambda'' = 1$, afin que la valeur de λ' ſurpaſſe auſſi peu l'unité qu'il eſt poſſible. On aura donc, à cauſe de $\nu = 0{,}23269$

$$\lambda' = \frac{64}{27} + 0{,}10342 + \frac{1}{27m} = 2{,}47379 + \frac{1}{27m}$$

& $$V(\lambda' - 1) = 1{,}21399 + \frac{0{,}01525}{m},$$

où l'on peut aiſément négliger le dernier terme, à moins que la multiplication m ne ſoit fort petite. Puiſque $x = my$ eſt le demi-diame-

metre de l'ouverture des deux premiers verres PP & QQ, il faut donner à p une si grande valeur, que x ne surpasse point le tiers ou le quart du rayon de la face la plus courbe, qui se trouve dans ces deux verres. Par cette condition ayant fixé la distance de foyer p du verre objectif, les autres déterminations seront :

$$B = -4\,;\ b = -p\,;\ \beta = 4p\,;\ q = -\frac{4}{3}p\,;\ r = \frac{4p}{m}\,;\ k = \frac{m+1}{m}r$$

$$AB = 0\,;\ BC = \frac{4(m+1)p}{m}\,;\ \theta > \frac{3}{4}.\frac{x}{p}\,;\ \theta'' > \frac{1}{4}.\frac{x}{p},$$

& les verres doivent être formés en sorte :

Puisque $\lambda = 1$, on aura pour le premier verre PP le rayon

$$\text{de sa face}\begin{cases}\text{de devant} = \dfrac{p}{1,62740} = 0,61448p\\[2mm] \text{de derrière} = \dfrac{p}{0,19078} = 5,24164p.\end{cases}$$

Or pour le verre QQ à cause de $B+1 = -3$ & $(1+B)q = 4p$, on aura le rayon de sa face de devant :

$$\frac{4p}{0,86428 \pm \left(3,29648 + \frac{0,04141}{m}\right)} = \frac{-p}{0,60805 + \frac{0,01035}{m}}$$

& celui de la face de derrière

$$\frac{4p}{-6,31882 \mp \left(3,29648 + \frac{0,04141}{m}\right)} = \frac{-p}{0,75549 - \frac{0,01035}{m}}$$

$$\text{Ou le rayon de sa face}\begin{cases}\text{de devant} = -\left(1,64460 - \dfrac{0,02798}{m}\right)p\\[2mm] \text{de derrière} = -\left(1,32364 + \dfrac{0,01813}{m}\right)p.\end{cases}$$

En-

Enfin pour le verre oculaire RR, dont la diſtance de foyer eſt $r = \frac{4p}{m}$, à cauſe de $\lambda'' = 1$,

le rayon de ſa face $\begin{cases} \text{de devant} = 5{,}24164\,r \\ \text{de derrière} = 0{,}61448\,r. \end{cases}$

Donc, puisque $x = my$, en égalant x à la quatrième partie du rayon de la face la plus courbe, nous aurons à peu prés $0{,}153p = x$, & partant $p = 7x$. Voilà donc la deſcription des Lunettes de cette eſpece.

La multiplication m avec le degré de clarté y donne d'abord le demi-diametre de l'ouverture de l'objećtif $x = my$, & prenant la diſtance de foyer de l'objećtif $p = 7x$, ou peut être ſuffit-il de prendre $p = 6x$, ce verre PP doit être travaillé en ſorte.

Le rayon de ſa face $\begin{cases} \text{de devant} = 0{,}61448p \text{ convexe} \\ \text{de derrière} = 5{,}24164p \text{ convexe.} \end{cases}$

Immédiatement à ce verre on joindra le ſecond QQ, qui doit être concave des deux cotés; dont la forme ſera telle, en négligeant les particules diviſées par m comme extrèmement petites:

Le rayon de ſa face $\begin{cases} \text{de devant} = -1{,}64460p \text{ concave} \\ \text{de derrière} = -1{,}32364p \text{ concave} \end{cases}$

& ce verre aura avec le premier PP la même ouverture, dont le demi-diametre $= x$. Où il faut remarquer, puisque $\theta q = x$, & partant $\theta = \frac{x}{q} = \frac{3x}{4p}$; la condition $\theta > \frac{3}{4}\frac{x}{p}$, ſera remplie en donnant au verre QQ une ouverture tant ſoit peu plus grande que celle du verre PP.

A' la diſtance $BC = \frac{4(m+1)p}{m}$ derrière le verre QQ on mettra le verre oculaire RR, dont la diſtance de foyer ſoit $r = \frac{4p}{m}$:

or pour la figure de ce verre je remarque, que puisque la particule $\frac{\lambda''}{m}$, qui en dépend, n'eſt d'aucune conſéquence, de ſorte que nos formules demeureroient les mêmes, quoique λ'' fût plus grand que l'unité, on veut bien faire ce verre également convexe; & partant le rayon de l'une & de l'autre face ſera $= \frac{11}{10}r$. Et alors pour ſon ouverture, dont le demi-diametre eſt $= \theta' r$, on peut hardiment prendre $\theta' = \frac{1}{4}$, ou même $\theta' = \frac{1}{3}$, & de là le demi-diametre du champ apparent ſera $\Phi = \frac{\theta'}{m+1} = \frac{1}{3(m+1)} = \frac{1416}{m+1}$ minutes. Enfin, pour le lieu de l'œil on aura $CO = k = \frac{m+1}{m}r$.

Remarque 1. Si l'on prend $y = \frac{3}{200}$, & partant $x = \frac{3m}{200}$ pouces, & enſuite $p = 7x = \frac{21m}{200}$ pouces, la longueur de cette Lunette ſera $AC = \frac{21}{50}(m+1)$ pouces. Donc une Lunette de cette eſpece, qui groſſit les objets en diametre 100 fois, aura $\frac{101}{50}.21$, ou 42 pouces de longueur.

Remarque 2. Ce que je viens de dire ſur la longueur de ces Lunettes n'a lieu, que lorsque les faces de tous les verres ſont exactement travaillées ſelon les meſures préſcrites, de ſorte que la confuſion évanouïſſe tout à fait. Or, puiſqu'on ne ſauroit eſpérer un tel degré de précifion dans la pratique, il eſt de la dernière importance d'examiner combien de petites aberrations des meſures préſcrites troublent l'effet de ces lunettes. Ayant négligé dans les faces du verre

QQ,

QQ, les particules $\frac{0,02799}{m}$ & $\frac{0,01813}{m}$, si nous supposons que les autres verres soient exactement formés selon les mesures prescrites, ces erreurs seront d'autant plus petites, plus la multiplication m est grande, de sorte que si $m = 50$, cette erreur ne vaut que la partie $\frac{1}{3000}$ du rayon entier de ces faces, qui est certainement insensible dans la pratique. Or, puisque ces petites particules tirent leur origine du terme $\frac{\lambda''}{64m}$, qui se trouve dans l'expression de la confusion, en les négligeant ce terme ne sera plus détruit, & la confusion sera encore $= \frac{\mu m x^3}{4p^3} \cdot \frac{\lambda''}{64m} = \frac{\mu}{4} \cdot \frac{\lambda'' x^3}{64p^3}$, il faut qu'il soit $\frac{x}{4p}\sqrt[3]{\lambda''} = \frac{1}{30}$, ou $p = 7\frac{1}{2}x\sqrt[3]{\lambda''}$. Donc, si $\lambda = 1$, pourvû qu'on prenne $p = 7\frac{1}{2}x$, une erreur de $\frac{1}{3000}$ dans les rayons des faces du verre QQ ne produira pas encore un effet sensible, au cas de $m = 50$. Mais, si l'erreur étoit étoit 8 fois plus grande, laquelle repondroit à $\lambda'' = 8$, il faudroit prendre $p = 15x$ pour en rendre l'effet insensible; & si l'erreur montoit à $\frac{1}{100}$ dans le cas de $m = 50$, il faudroit prendre p trois fois, ou $\sqrt[3]{30}$ fois plus grande, c'est à dire $p = 23x$. D'où l'on voit que, pour prévenir l'effet des petites aberrations, qui sont inévitables dans la pratique, il faut prendre le rapport de p à x beaucoup plus grand, que le donne le calcul pris à la rigueur. Ainsi, au lieu de prendre $p = 7x$, on ne fera pas mal de prendre $p = 25x$ ou $o = 30x$, & cela d'autant plus, plus la multiplication sera grande. Or il faut remarquer que cette augmentation suit la racine cubique de la multiplication m.

Re-

Remarque 3. Donc pour une multiplication quelconque m, en ſuppoſant une erreur de $\frac{1}{100}$ dans les rayons des faces, il faudra prendre $p = 23x\sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 6\frac{1}{3}x\sqrt[3]{m}$, & la longueur de la Lunette ſera $= \frac{25\frac{1}{3}(m+1)x}{m}\sqrt[3]{m}$. Or ſi l'on conſtruiſoit une lunette ordinaire de deux verres pour la même multiplication, on auroit la confuſion $= \frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(1+\frac{1}{m}\right) = \frac{\mu}{4\cdot 30^3}$, donc $p = 30x\sqrt[3]{(m+1)}$, & la longueur de la lunette $= \frac{30(m+1)}{m}x\sqrt[3]{(m+1)}$; qui n'étant que fort peu plus longue, que celle de trois verres, il n'y a presque rien à gagner par cette eſpece; & on perdroit encore conſidérablement, ſi la pratique étoit aſſujettie à de plus grandes erreurs.

II Eſpece poſant $n = \frac{1}{2}$.

La confuſion étant $= \frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{1}{8}\lambda' + \frac{1}{4}\nu + \frac{\lambda''}{8m}\right)$ ſe réduit le plus aiſément à rien en ſuppoſant $\lambda = 1$, & alors il faut poſer

$$\lambda' = 8 + 2\nu + \frac{\lambda''}{m} = 8{,}46538 + \frac{\lambda''}{m},$$

d'où l'on tire:

$$\sqrt{(\lambda' - 1)} = 2{,}73228 + \frac{0{,}18301\,\lambda''}{m},$$

& les autres déterminations ſeront:

$$B = -2;\ b = -p;\ \beta = 2p;\ q = -2p;\ r = \frac{2p}{m};\ k = \frac{m+1}{m}r$$

$$AB = 0;\ BC = \frac{2(m+1)p}{m};\ \theta > \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{p};\ \theta' > \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{p}.$$

Or

Or les verres doivent être formés en sorte :

Puisque $\lambda = 1$, on aura pour le premier verre PP

le rayon de sa face $\begin{cases} \text{de devant} = 0{,}61448\,p \\ \text{de derrière} = 5{,}24164\,p. \end{cases}$

Pour le verre QQ, à cause de $B = -2$, & $(1+B)q = 2p$, on aura le rayon de sa face de devant

$$\frac{-2p}{1{,}22723 + 0{,}16563 \cdot \frac{\lambda''}{m}} = -p\left(1{,}62970 - 0{,}21994\frac{\lambda''}{m}\right)$$

& de derrière

$$\frac{-2p}{0{,}59095 - 0{,}16563 \cdot \frac{\lambda''}{m}} = -p\left(3{,}38438 + 0{,}94860\frac{\lambda''}{m}\right)$$

Si l'on négligeoit les termes divisés par m, & qu'on mît $\lambda'' = 1$, & $m = 50$, l'erreur seroit dans la face de devant $\frac{1}{370}$, & dans celle de derrière $\frac{1}{179}$; prenant donc un milieu, une erreur de $\frac{1}{270}$ dans les faces de ce verre produiroit une confusion $= \frac{\mu}{4} \cdot \frac{x^3}{8p^3}$, & partant il faudroit prendre $p = 15\,x$; mais, si l'erreur étoit $\frac{1}{100}$, il faudroit prendre $p = 19\,x$, & pour une autre multiplication quelconque $p = 19\,x\sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 5\tfrac{1}{4}\,x\sqrt[3]{m}$: d'où la longueur de la Lunette seroit $10\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)x\sqrt[3]{m}$; qui nonobstant cette erreur de $\frac{1}{100}$ est presque trois fois plus petite, que si l'on vouloit se servir d'une lunette de deux verres.

Mais

Mais ſuppoſant qu'on executât les verres exactement ſuivant les régles données, ſi nous égalons x à la quatriéme partie du rayon de la face la plus courbe, nous aurons comme auparavant $p = 7x$. Voici donc la régle pour la conſtruction des lunettes de cette eſpece.

La multiplication m étant propoſée avec le degré de clarté y, on aura d'abord le demi-diametre de l'ouverture de l'objectif $x = my$, d'où l'on prendra $p = 7x$, ou plus grand ſelon les erreurs inévitables de la pratique. Savoir ſi l'on doit craindre une erreur de $\frac{1}{100}$, il faut prendre $p = 5\frac{1}{4}x\sqrt[3]{m}$, & ſi l'erreur à craindre montoit à $\frac{1}{50}$, on devroit prendre $p = 6\frac{3}{4}x\sqrt[3]{m}$, ſi elle montoit à $\frac{1}{25}$, $p = 8\frac{1}{4}x\sqrt[3]{m}$.

Ayant ainſi établi la valeur de p, on aura

Pour le verre PP convexe des deux cotés

$$\text{le rayon de la face} \begin{cases} \text{de devant} = 0{,}61448\,p \\ \text{de derrière} = 5{,}24164\,p. \end{cases}$$

Pour le verre QQ concave des deux cotés

$$\text{le rayon de la face} \begin{cases} \text{de devant} = -\left(1{,}62970 - 0{,}21994.\frac{\lambda''}{m}\right)p \\ \text{de derrière} = -\left(3{,}38438 + 0{,}94860.\frac{\lambda''}{m}\right)p. \end{cases}$$

Le nombre λ'' dépend de la figure du verre oculaire RR, lequel étant fait également convexe des deux cotés, on a $\lambda'' = 1{,}6298$, & la diſtance de foyer du verre RR étant $r = \frac{2p}{m}$, le rayon de chaque face doit être pris $= \frac{11}{10}r$.

En-

Ensuite on joindra les deux verres PP & QQ immédiatement ensemble, & on établira le verre oculaire RR à la distance $BC = 2\left(1+\frac{1}{m}\right)p$: derrière lequel l'œil se trouvera à la distance $CO = k = \left(1+\frac{1}{m}\right)r$. Enfin prenant $\theta' = \frac{1}{3}$ le demi-diametre du champ apparent sera $\phi = \frac{1}{3(m+1)} = \frac{1146}{m+1}$ minutes.

Remarque. Cette espece est donc préférable à la précédente, puisque les mêmes erreurs, qui sont à craindre dans la pratique, n'allongent pas tant la lunette. Et quand même l'erreur monteroit à $\frac{1}{25}$, la longueur de la lunette seroit encore deux fois plus petite, que si l'on employoit une lunette de deux verres.

III Espece posant $n = \frac{2}{3}$.

La confusion étant $= \frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{1}{27}\lambda' + \frac{2}{9}\nu + \frac{8\lambda''}{27m}\right)$, se réduit le plus commodément à rien en prenant $\lambda = 1$, pour avoir

$$\lambda' = 27 + 6\nu + \frac{8\lambda''}{m} = 28,39614 + \frac{8\lambda''}{m},$$

d'où l'on tire :

$$V(\lambda' - 1) = 5,23413 + 0,76422.\frac{\lambda''}{m},$$

& les autres déterminations seront :

$$B = -\frac{3}{2};\ b = -p;\ \beta = \frac{3}{2}p;\ q = -3p;\ r = \frac{3p}{2m};\ k = \frac{m+1}{m}r;$$

$$AB = 0\ ;\ BC = \frac{3(m+1)}{2m}p\ ;\ \theta > \frac{1}{3}.\frac{x}{p}\ ;\ \theta' > \frac{2}{3}.\frac{x}{p}.$$

Pour

Pour la formation du verre QQ à cauſe de $B+1=-\frac{1}{2}$, & $(1+B)q=\frac{3}{2}p$, on aura le rayon de ſa face de devant :

$$\frac{-1,5p}{0,52756+0,34585.\frac{\lambda''}{m}}=-p\left(2,84328-1,86399.\frac{\lambda''}{m}\right)$$

& celui de ſa face de derrière :

$$\frac{+1,5p}{0,11846+0,34585.\frac{\lambda''}{m}}=+p\left(12,66143-36,96332.\frac{\lambda''}{m}\right).$$

Si l'on négligeoit les termes diviſés par m, & qu'il fût $m=50$, en poſant $\lambda''=1$, l'erreur ſeroit dans la face de devant $\frac{1}{76}$, & dans celle de derrière $\frac{1}{17}$ du rayon entier: prenant donc un milieu $\frac{1}{50}$, à cauſe de cette erreur il faudroit prendre $p=20x$. Donc, ſi l'erreur n'étoit qu' $\frac{1}{100}$, il faudroit prendre $p=16x$, & pour toute autre multiplication m, & la même erreur $\frac{1}{100}$, $p=16x\sqrt[3]{\frac{m}{50}}=4\frac{1}{3}x\sqrt[3]{m}$, d'où la longueur de la lunette étant $=6\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)x\sqrt[3]{m}$ ſera encore environ 4 fois plus petite, que d'une lunette à deux verres, nonobſtant une erreur commiſe de $\frac{1}{100}$: & quand même l'erreur monteroit à $\frac{1}{12}$, la lunette ſeroit encore deux fois plus courte.

Mais ſuppoſant qu'on réuſſiſſe parfaitement dans la figure preſcrite des verres, on pourroit prendre $p=7x$, & l'on obtiendroit des lunettes encore beaucoup plus courtes.

La

La multiplication m étant donc proposée avec le degré de clarté y, on aura d'abord le demi-diametre de l'ouverture du verre objectif $x = my$, qui doit aussi convenir au verre QQ; & alors on prendra $p = 7x$, ou plus grand, selon que la pratique s'écarte de la Théorie, savoir $p = 4\frac{1}{3}x\sqrt[3]{m}$, si l'erreur étoit $\frac{1}{100}$, & $p = 5\frac{1}{2}x\sqrt[3]{m}$, si l'erreur montoit à $\frac{1}{50}$; & $p = 6\frac{3}{4}x\sqrt[3]{m}$, si l' erreur montoit à $\frac{1}{25}$.

Ayant ainsi établi la quantité p, on aura

Pour le verre PP convexe de deux cotés

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,61448\,p \\ \text{de derrière} = 5,24164\,p. \end{cases}$

Pour le verre QQ, qui est ménisque tournant sa face concave en avant :

$$\text{le rayon de la face} \begin{cases} \text{de devant} = -\left(2,84328 - 1,86399\frac{\lambda''}{m}\right)p \\ \text{de derrière} = +\left(12,66143 - 36,96332\frac{\lambda''}{m}\right)p, \end{cases}$$

où $\lambda'' = 1,6298$, si l'on fait le verre oculaire RR également convexe des deux cotés, pour qu'il admette la plus grande ouverture, & qu'on puisse prendre $\theta' = \frac{1}{3}$, d'où résulte le demi-diametre du champ apparent $\Phi = \frac{1146}{m+1}$ minutes. Or la distance de foyer du verre oculaire étant $r = \frac{3p}{2m}$, le rayon de chaque face doit être $= \frac{11}{10}r$, & l'œil placé à la distance $CO = k = \left(1 + \frac{1}{m}\right)r$. Enfin les deux verres PP & QQ étant joints immédiatement ensemble, la distance du

du verre oculaire ſera $BC = \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)p$, qui eſt auſſi la longueur de la lunette.

Remarque. Ces lunettes ſont encore préférables aux précédentes, puisqu'elles deviennent plus courtes, quoiqu'on commette les mêmes erreurs dans la conſtruction des verres.

IV Eſpece poſant $n = 1$.

Puisque la diſtance de foyer du ſecond verre QQ devient infinie, ce verre ne changera rien dans la réfraction, & cette eſpece revient au cas des lunettes à deux verres; la diſtance de foyer de l'objectif étant $= p$, & celle de l'oculaire $r = \left(1+\frac{1}{m}\right)p$. La multiplication m avec le degré de clarté y donne d'abord le demi-diametre de l'ouverture de l'objectif $x = my$, & la confuſion étant $= \frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda+\frac{\lambda''}{m}\right)$ ne peut être réduite à zero. On prendra donc $\lambda = 1$, & poſant la confuſion égale à $\frac{\mu}{4 \cdot 30^3}$, on aura $p = 30x\sqrt{(m+\lambda'')}$ où la figure de l'objectif ſera la même que dans les eſpeces précédentes; & faiſant l'oculaire également convexe des deux cotés, on poſera $\lambda'' = 1,6298$. Le champ apparent ſera auſſi le même que jusqu'ici.

V Eſpece poſant $n = 1 + t$.

On aura la confuſion $= \frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda+\lambda' t^3 - \nu(t+tt) + \frac{\lambda''(1+t)^3}{m}\right)$ laquelle ne pouvant être réduite à zero, il conviendra de chercher une telle valeur de t afin qu'elle devienne la plus petite. Pour cet effet il faut d'abord prendre $\lambda = 1$ & $\lambda' = 1$, & on peut négliger dans cette recherche le dernier terme $\frac{\lambda''(1+t)^3}{m}$, puisqu'il eſt fort

fort petit à l'égard des autres, surtout dans les grandes multiplications. Il s'agit donc de rendre $1 + t^3 - \nu t - \nu tt$ un *minimum*, d'où l'on trouve $3tt - \nu - 2\nu t = 0$ & $t = \frac{\nu \pm \sqrt{(\nu\nu + 3\nu)}}{3} = \frac{11}{30}$. Alors la confusion sera $= \frac{\mu m x^8}{4p^3}\left(0,93268 + \frac{\lambda''(1+t)^3}{m}\right)$.

Mais pour trouver le cas le plus avantageux, il faut plutôt chercher celui, ou la longueur de toute la lunette devient la plus petite. Posant donc en général la confusion $= \frac{\mu}{4 \cdot 30^3}$ pour avoir

$$p = 30x\sqrt[3]{m}\left(\lambda + \lambda'(n-1)^3 - \nu n(n-1) + \frac{\lambda'' n^3}{m}\right),$$

& nous obtiendrons la longueur de la lunette

$$BC = \frac{30(m+1)x}{\sqrt[3]{mm}}\sqrt[3]{\left(\frac{\lambda}{n^3} + \frac{\lambda'(n-1)^3}{n^3} - \frac{\nu(n-1)}{nn} + \frac{\lambda''}{m}\right)},$$

qui deviendra un *minimum* en prenant $\lambda = 1$, $\lambda' = 1$ & $n = 2$, d'où elle résulte $BC = \frac{30(m+1)x}{\sqrt[3]{mm}}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{4} + \frac{\lambda''}{m}\right)}$,

ou $BC = \frac{30(m+1)x}{\sqrt[3]{mm}}\sqrt[3]{\left(0,19183 + \frac{\lambda''}{m}\right)}$.

Or dans le cas de deux verres, ou de $n = 1$, cette longueur seroit $= \frac{30(m+1)x}{\sqrt[3]{mm}}\sqrt[3]{\left(1 + \frac{\lambda''}{m}\right)}$, & partant environ $\sqrt[3]{5}$, ou $1\frac{3}{4}$ fois plus longue.

Posons donc $\lambda = 1$, $\lambda' = 1$, & $n = 2$, pour avoir

$$B = -\frac{1}{2};\ b = -p;\ \beta = \frac{1}{2}p;\ q = p;\ r = \frac{p}{2m};\ k = \left(1 + \frac{1}{m}\right)r.$$

$$AB = 0;\ BC = \frac{m+1}{2m}p;\ \theta > \frac{x}{p};\ \&\ \theta'' > 2 \cdot \frac{x}{p},$$

& après avoir déterminé par la multiplication m, & le degré de clarté y, le demi-diametre de l'ouverture de l'objectif $x = my$, on prendra $p = 30x\sqrt[3]{(1,53462m + 8\lambda'')} = q$,
ou $p = q = 60x\sqrt[3]{(0,19183m + \lambda'')}$,

& la figure du premier verre PP sera

rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,61448p \\ \text{de derrière} = 5,24164p. \end{cases}$

& pour le verre QQ le rayon de sa face

de devant $= \dfrac{q}{3,06402} = 0,32637p$

de derrière $= \dfrac{-q}{1,24584} = 0,80267p.$

Or pour le verre oculaire RR, si l'on le fait également convexe des deux côtés pour qu'il admette la plus grande ouverture, le rayon de chaque face doit être $= \frac{11}{10}r$, prenant $r = \frac{p}{2m}$, & alors on auroit $\lambda'' = 1,6298$, mais si l'on vouloit mettre $\lambda'' = 1$, on devroit prendre

le rayon de sa face $\begin{cases} \text{de devant} = 5,24164r \\ \text{de derrière} = 0,61448r. \end{cases}$

Or alors on pourroit à peine prendre $\theta' = \frac{1}{6}$, de sorte que le demi-diametre du champ apparent seroit $\phi = \frac{1}{5(m+1)} = \frac{687}{m+1}$ minutes. Enfin la distance BC, ou la longueur de la Lunette, sera $= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)p$, & pour le lieu de l'œil $CO = k = \left(1 + \frac{1}{m}\right)r$.

Re-

Remarque. Cette eſpece ne cede preſque en rien aux précédentes; car, quoique la longueur de la lunette ſoit plus grande, les erreurs dans la figure des verres n'empêchent preſque point le ſuccès, puiſque la nature du *minimum*, d'où ces déterminations ſont tirées admet une aberration aſſez ſenſible, avant que l'effet devienne conſidérable. Mais, ſi les ouvriers parvenoient à exécuter préciſément le plan preſcrit, il n'y a aucun doute que les eſpeces n°. 2 & 3 ne ſoient fort preférables, puiſqu'elles donneroient des Lunettes beaucoup plus courtes.

Second cas, p *poſitif &* B *négatif.*

Pour ce cas nous n'avons qu'à donner au nombre n du cas précédent des valeurs négatives, & à prendre p négatif.

Mettant donc $B = \frac{1}{n}$, & écrivant $-p$, au lieu de p, on aura les déterminations ſuivantes.

$$q = \frac{p}{n+1}\ ;\ r = \frac{p}{mn}\ ;\ k = \frac{m+1}{m} r$$

$$AB = 0\ ;\ BC = \frac{(m+1)p}{mn}\ ;\ \theta > (n+1)\frac{x}{p}\ \&\ \theta' > n.\frac{x}{p}\,,$$

De ſorte que $-p$ marque la diſtance de foyer du premier verre PP & la confuſion ſera exprimée en ſorte:

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - (n+1)^3\lambda' - \nu n(n+1) - \frac{\lambda'' n^3}{m}\right),$$

qui peut bien être réduite à zero, en prenant $\lambda > 1$, & laiſſant $\lambda' = 1$, il faudra prendre alors:

$$\lambda = (n+1)^3 + \nu n(n+1) + \frac{\lambda'' n^3}{m}.$$

Or il eſt d'abord évident qu'on ne ſauroit prendre $n = 0$, puiſque alors la diſtance BC deviendroit infinie, & il ne convient pas non plus de donner à n une valeur beaucoup plus grande que l'unité, puiſ-

que

que la valeur de λ deviendroit trop grande, & la figure du premier verre PP incommode. J'examinerai donc les principales especes contenues dans ce cas.

VI Espece posant $n = \frac{1}{4}$.

Pour cette espece nous avons:

$$B = 4\ ;\ q = \frac{4}{5}p\ ;\ r = \frac{4p}{m}\ ;\ k = \frac{m+1}{m}r\ ;$$

$$AB = 0\ ;\ BC = \frac{4(m+1)}{m}p\ ;\ \theta > \frac{4}{5}.\frac{x}{p}\ ;\ \theta' > \frac{1}{4}.\frac{x}{p},$$

& pour faire évanouïr la confusion en posant $\lambda' = 1$,

$$\lambda = \frac{125}{64} + \frac{5}{16}\nu + \frac{\lambda''}{64m} = 2,02584 + \frac{\lambda''}{64m},$$

d'où nous aurons:

$$\sqrt{(\lambda - 1)} = 1,01284 + 0,00771.\frac{\lambda''}{m}$$

& partant pour le verre PP le rayon de sa face de devant

$$\frac{-p}{1,62740 \pm \left(0,91675 + 0,00698.\frac{\lambda''}{m}\right)} = -p\left(1,40696 + 0,01382.\frac{\lambda''}{m}\right)$$

& celui de sa face de derrière

$$\frac{-p}{0,19078 \mp \left(0,91675 + 0,00698.\frac{\lambda''}{m}\right)} = -p\left(0,90291 - 0,00569.\frac{\lambda''}{m}\right)$$

Or pour le verre QQ on aura

$$\text{le rayon de la face} \begin{cases} \text{de devant} = 1,67328\,p \\ \text{de derrière} = 0,59698\,p. \end{cases}$$

Ici il faut observer, que si l'on négligeoit dans les rayons des faces du verre PP les parties divisées par m, ou en posant $\lambda'' = 1$ & $m = 50$, si

si l'on y commettoit une erreur de $\frac{1}{5923}$ il faudroit prendre $p = 7\frac{1}{2}x$, & partant une erreur de $\frac{1}{100}$ obligeroit à prendre $p = 29x$, & pour une autre multiplication quelconque $p = 29x\sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 8x\sqrt[3]{m}$, & la longueur de la lunette seroit $= 32\left(1 + \frac{1}{m}\right)x\sqrt[3]{m}$; de sorte qu'une si petite erreur allongeroit la lunette plus, que si elle étoit composée de deux verres.

Mais, si l'on pouvoit exactement observer les mesures prescrites, il suffiroit de prendre $p = 7x$, ayant $x = my$, & la construction de la lunette doit être conduite par ces régles, ayant donné à p sa juste valeur.

Le premier verre PP doit être concave des deux côtés en sorte

$$\text{la rayon de sa face}\begin{cases}\text{de devant} = -\left(1{,}40696 + 0{,}01382.\dfrac{\lambda''}{m}\right)p\\ \text{de derrière} = -\left(0{,}90291 - 0.00569.\dfrac{\lambda''}{m}\right)p.\end{cases}$$

Le second verre QQ doit être convexe des deux cotés

$$\text{le rayon de sa face}\begin{cases}\text{de devant} = 1{,}67328\,p\\ \text{de derrière} = 0{,}59698\,p.\end{cases}$$

Ces deux verres doivent être joints immédiatement ensemble & derrière à la distance $= 4\left(1 + \frac{1}{m}\right)p$, placé le verre oculaire RR, dont la distance de foyer soit $= r = \frac{4p}{m}$. Si l'on fait également convexes ces deux côtés on aura $\lambda'' = 1{,}6298$, & le rayon de chaque face

 doit

doit être pris $= \frac{11}{10} r$, d'où l'on obtiendra un champ apparent, dont le demi-diametre $\Phi = \frac{1146}{m+1}$ minutes, prenant $\theta' = \frac{1}{3}$.

VII Espece, posant $n = \frac{1}{2}$.

Pour cette espece nous aurons :

$$B = 2\ ;\quad q = \frac{2}{3} p\ ;\quad r = \frac{2p}{m}\ ;\quad k = \frac{m+1}{m} p\ ;$$

$$AB = 0\ ;\ BC = \frac{2(m+1)}{m}\ ;\quad \theta > \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{p}\ ;\quad \&\ \theta' > \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{p},$$

& afin que la confusion évanouïsse tout à fait en posant $\lambda' = 1$,

$$\lambda = \frac{27}{8} + \frac{3}{4} v + \frac{\lambda''}{8m} = 3,54952 + \frac{\lambda''}{8m},$$

d'où l'on tire

$$\sqrt{(\lambda - 1)} = 1,59672 + 0,03914 \cdot \frac{\lambda''}{m}.$$

Donc pour le verre PP il faut faire le rayon de sa face de devant

$$\frac{-p}{1,62740 \pm \left(1,44524 + 0,03543 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)} = \frac{-p}{0,18216 - 0,04543 \cdot \frac{\lambda''}{m}}$$

& de derrière

$$\frac{-p}{0,19078 \mp \left(1,44524 + 0,03443 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)} = \frac{-p}{1,63602 + 0,03543 \cdot \frac{\lambda''}{m}}$$

d'où l'on tire pour le verre PP cette construction :

le rayon de sa face $\begin{cases} \text{de devant} = -\left(5,48698 + 1,06771 \cdot \lambda''\right) p \\ \text{de derrière} = -\left(0,61124 - 0,01324 \cdot \lambda''\right) p \end{cases}$

&

& pour le verre QQ on aura :

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,99554\,p \\ \text{de derrière} = 0,58045\,p. \end{cases}$

Ces deux verres étant joints ensemble on mettra derrière eux à la distance de foyer $BC = 2\left(1+\frac{1}{m}\right)p$ le verre oculaire RR, dont la distance de foyer $r = \frac{2p}{m}$; lequel étant fait également convexe des deux côtés, on aura $\lambda'' = 1,6298$.

Si l'on ne commettoit aucune erreur dans l'execution, on pourroit prendre $p = 7x$: mais, pour juger des erreurs, supposons qu'on se trompe des parties divisées par m, de sorte que prenant un milieu, & posant $m = 50$ & $\lambda'' = 1$, l'erreur vaudroit $\frac{1}{282}$, & il faudroit prendre $p = 15x$. Donc une erreur de $\frac{1}{100}$ donneroit $p = 21x$, & pour une multiplication quelconque $p = 21x\sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 5\frac{3}{4}x\sqrt[3]{m}$; d'où la longueur de la lunette seroit $= 11\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)x\sqrt[3]{m}$, & partant presque trois fois plus petite, que des lunettes à deux verres: & quand même l'erreur monteroit à $\frac{8}{100}$ des rayons entiers, on n'auroit qu'à prendre $p = 11\frac{1}{2}x\sqrt[3]{m}$, & la longueur de la lunette $23\left(1+\frac{1}{m}\right)x\sqrt[3]{m}$ seroit encore moindre que celle de deux verres.

VIII Espece, posant $n = 1$.

On aura $B = 1$; $q = \frac{1}{2}p$; $r = \frac{p}{m}$; $k = \left(1+\frac{1}{m}\right)r$, & ensuite $AB = 0$; $BC = \left(1+\frac{1}{m}\right)p$; $\theta > 2.\frac{x}{p}$; & $\theta' > \frac{x}{p}$.

Pour

Pour faire évanouïr la confusion, prenant $\lambda' = 1$, il faut qu'il soit

$$\lambda = 8 + 2\nu + \frac{\lambda''}{m} = 8,46528 + \frac{\lambda''}{m},$$

d'où l'on tire :

$$\sqrt{(\lambda - 1)} = 2,73228 + 0,18301 . \frac{\lambda''}{m},$$

& partant pour le verre PP le rayon de sa face de devant :

$$\frac{-p}{1,62740 \pm \left(2,47307 + 0,16565 . \frac{\lambda''}{m}\right)} = \frac{+p}{0,84567 + 0,16565 . \frac{\lambda''}{m}}$$

& de derrière

$$\frac{-p}{0,19078 \mp \left(2,47307 + 0,16565 . \frac{\lambda''}{m}\right)} = \frac{-p}{2,66386 + 0,16565 . \frac{\lambda''}{m}}$$

Le premier verre PP sera donc ménisque, tournant sa face convexe vers l'objet

$$\text{le rayon de sa face} \begin{cases} \text{de devant} = + \left(1,18249 - 0,23162 . \frac{\lambda''}{m}\right) \\ \text{de derrière} = - \left(0,37540 - 0,02335 . \frac{\lambda''}{m}\right). \end{cases}$$

Pour le second QQ on aura $\lambda' = 1$, &

$$\text{le rayon de sa face} \begin{cases} \text{de devant} = + 0,55\, p \\ \text{de derrière} = + 0,55\, p . \end{cases}$$

qui est donc également convexe des deux côtés.

Ces deux verres étant joints ensemble, l'oculaire RR, dont la distance de foyer est $r = \frac{p}{m}$, doit être placé à la distance BC $= \left(1 + \frac{1}{m}\right) p$; & ce verre étant fait également convexe des deux cô-

tés, de ſorte que le rayon de chaque face $= \frac{11}{10} r$, on aura $\lambda'' = 1,6298$, d'où le demi-diametre du champ apparent ſera $\phi = \frac{1146}{m+1}$ minutes, prenant $\theta' = \frac{1}{3}$.

Si l'on pouvoit exactement exécuter ces meſures, on pourroit prendre $x = 0,09p$, ou bien $p = 11x$, d'où la longueur de la lunette ſeroit $= 11\left(1+\frac{1}{m}\right)x$, & partant plus petite que dans l'eſpece précédente. Mais, ſi l'on ſe trompoit des termes affectés par $\frac{\lambda''}{m}$, ce qui en poſant $\lambda'' = 1$ & $m = 50$ ſeroit une erreur de $\frac{1}{283}$ ſur les rayons entiers, il faudroit prendre $p = 30x$, & partant ſi l'erreur ne montoit qu'à $\frac{1}{100}$, $p = 42x$, & pour une multiplication quelconque $p = 42x\sqrt[3]{\frac{m}{50}} = 12x\sqrt[3]{m}$: donc la longueur de la lunette $= 12\left(1+\frac{1}{m}\right)x\sqrt[3]{m}$ ou $2\frac{1}{2}$ fois plus petite qu'au cas de deux verres.

Remarque. Ce ſont les eſpeces principales de la première hypotheſe, dont le caractere eſt, que les deux verres PP & QQ ſont immédiatement joints enſemble, ou que la diſtance AB évanouït. La plûpart de ces eſpeces ont un avantage aſſez conſidérable ſur les lunettes à deux verres, entant qu'elles ſont plus courtes, & ce raccourciſſement pourroit aller fort loin, ſi l'art de polir les verres étoit porté à un plus haut degré de perfection. Cependant on ne gagne rien ſur le champ apparent, qui eſt le même, que dans les lunettes de deux verres; mais les hypotheſes ſuivantes fourniront un plus grand champ.

SECONDE HYPOTHESE
où $\pi = \Phi$ & $\pi' = \theta'$.

Puisque $\pi = \Phi$, on aura $\Phi = \frac{\Phi + \theta'}{m+1}$, & partant $\Phi = \frac{\theta'}{m}$, & le champ apparent est un peu plus grand que dans l'hypothese précédente. Ayant donc $\pi = \Phi$ & $\pi' = m\Phi$, nous aurons les déterminations suivantes

$$b = -(B+1)p\,;\ \ \beta = -B(B+1)p\,;\ \ q = -Bp$$
$$c = r = -\frac{B}{m}p, \quad \& \quad k = r,$$

& partant les distances des verres

$$AB = \alpha + b = -Bp\,; \quad BC = \beta + c = -Bp\left(B+1+\frac{1}{m}\right),$$

d'où il faut encore que l'une ou l'autre des deux quantités B & p soit négative ; afin que $-Bp$ devienne une quantité positive ; & alors la distance AB sera précisément égale à la distance de foyer du second verre QQ. Outre cela il sera $r = \frac{q}{m}$, & la longueur de toute la lunette

$$AB + BC = AC = -Bp\left(B+2+\frac{1}{m}\right) = q\left(B+2+\frac{1}{m}\right).$$

Depuis, parce que $-Bp$ est une quantité positive, il faut que $B+1+\frac{1}{m}$ en soit aussi une: donc, si B est négatif, il faut qu'il soit plus petit que $1+\frac{1}{m}$. Les conditions à remplir sont $\theta > \frac{B+1}{B}\cdot\frac{x}{p}$ & $\theta' > \frac{1}{B}\cdot\frac{x}{p}$; & la confusion devient :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{(B+1)^2}{B^3}[\lambda'(B+1)^2 + \nu B] - \frac{\lambda''}{B^3 m}\right)$$

Enfin

Enfin, pour que la diverſe réfrangibilité des rayons ne produiſe aucun effet ſenſible, il faut ſatisfaire à cette équation :

$$-(B+1)+1=0 \quad \text{c. à. d.} \quad B=0$$

ce qui étant impoſſible, cet effet ſera d'autant plus petit, plus on prendra petit le nombre B. Pour déveloper cette hypotheſe, nous aurons deux cas à examiner, l'un où p eſt poſitif, & B négatif : l'autre où p eſt négatif, & B poſitif.

Premier cas, p *poſitif &* B *négatif.*

Poſons $B=-n$, pour avoir $q=np$, $r=\frac{np}{m}$, $k=r$; $AB=np$ & $BC=np\left(1+\frac{1}{m}-n\right)$, & la confuſion

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda+\frac{\lambda'(n-1)^4}{n^3}-\frac{\nu(n-1)^2}{n^2}+\frac{\lambda''}{n^3 m}\right),$$

où il faut qu'il ſoit $n<1+\frac{1}{m}$.

IX Eſpece, poſant $n=+\frac{1}{m}$.

Ayant ici $B=-1-\frac{1}{m}$; les déterminations de la lunette ſeront

$$q=\left(1+\frac{1}{m}\right)p;\ r=\frac{q}{m};\ k=r;\ AB=q=\left(1+\frac{1}{m}\right)p$$
$$\& \quad BC=0,$$

les deux derniers verres QQ & RR ſont joints enſemble, & la longueurs de la lunette eſt $=\left(1+\frac{1}{m}\right)p$. Mais la confuſion étant

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda+\frac{\lambda'}{m(m+1)^3}-\frac{\nu}{(m+1)^2}+\frac{\lambda'' mm}{(m+1)^3}\right)$$

puiſ-

puisque le terme $\frac{\lambda'}{m(m+1)^3}$ eſt extrêmement petit, il eſt indifférent quelle figure qu'on donne au ſecond verre QQ pourvû que ſa diſtance de foyer ſoit $= q = \left(1+\frac{1}{m}\right)p$. On prendra donc $\lambda = 1$ & $p = 30x\sqrt[3]{(m+\lambda'')}$, & la longueur de la lunette ſera la même que d'une lunette à deux verres, le ſeul avantage conſiſtant dans la petite augmentation du champ apparent, laquelle étant imperceptible, l'addition du troiſième verre ne vaut pas la peine.

Remarque. Si l'on met $n = 1$, ou $n < 1$, on n'en retire non plus aucun avantage ſenſible ſur les lunettes à deux verres. La plus avantageuſe poſition ſeroit $n = \frac{2}{3}$, qui rendroit la confuſion plus petite, mais pourtant l'avantage ſeroit extrêmement petit. C'eſt pourquoi je paſſe à l'autre cas contenu dans cette hypotheſe.

Second cas, p *négatif &* B *poſitif.*

Mettons donc $-p$ & $-n$ pour $+p$ & $+n$ dans le cas précédent, pour avoir :

$$B = n\ ;\ q = np\ ;\ r = \frac{np}{m}\ ;\ k = r\ ;$$

$$AB = np\ ;\ BC = np\left(1+n+\frac{1}{m}\right),$$

& la confuſion

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{\lambda'(n+1)^4}{n^3} - \frac{\nu(n+1)^2}{nn} - \frac{\lambda''}{n^3 m}\right),$$

& laquelle, pour qu'elle puiſſe être réduite à rien, & que la valeur de λ ne devienne pas très grande, nous n'aurons qu'une eſpece à développer, qui eſt la

X Espece, posant $n = 3$.

Ayant donc $B = 3$; $q = 3p$; $r = \frac{3p}{m}$; $k = r$;

$AB = 3p$; $BC = 3p\left(4 + \frac{1}{m}\right)$; $\theta > \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{p}$; & $\theta' > \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{p}$

de forte que la longueur de toute la lunette eſt $AC = 3p\left(5 + \frac{1}{m}\right)$

la confuſion ſera $\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{256}{27}\lambda' - \frac{16}{9}\nu - \frac{\lambda''}{27m}\right)$.

Pour la réduire à rien ſoit $\lambda' = 1$, & nous aurons:

$$\lambda = 9,89515 + \frac{\lambda''}{27m}, \quad \text{\& partant}$$

$$\sqrt{(\lambda - 1)} = 2,98247 + 0,00621 \cdot \frac{\lambda''}{m},$$

d'où pour le verre PP réſulte le rayon de ſa face de devant

$$\frac{-p}{1,62740 \pm \left(2,69953 + 0,00562 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)} = \frac{+p}{1,07213 + 0,00562 \cdot \frac{\lambda''}{m}}$$

& celui de derrière

$$\frac{-p}{0,19078 \mp \left(2,69953 + 0,00562 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)} = \frac{-p}{2,89031 + 0,00562 \cdot \frac{\lambda''}{m}},$$

& partant le verre PP doit être conſtruit en ſorte,

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = +\left(0,93272 - 0,00489 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)p \\ \text{de derrière} = -\left(0,34598 - 0,00067 \cdot \frac{\lambda''}{m}\right)p. \end{cases}$

A' la diſtance $AB = 3p$, après ce verre on placera le ſecond QQ dont la diſtance de foyer eſt $q = 3p$, &

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 1,81840\, q \\ \text{de derrière} = 0,78849\, q. \end{cases}$

En-

Enfin à la distance $BC = \left(12 + \frac{3}{m}\right) p$ après ce verre on placera l'oculaire RR, dont la distance de foyer $r = \frac{3p}{m}$, qui étant fait également convexe des deux côtés donnera $\lambda'' = 1,6298$. Il reste donc de déterminer p; or le quart du moindre rayon du verre PP donne $0,086 = \frac{x}{p}$, donc $p = 11x$; & puisque $\theta = 0,197$, cette valeur est plus grande que $\frac{4}{3} \cdot \frac{x}{p}$ comme il faut. Mais prenant $p = 11x$, la longueur de la lunette sera $= \left(165 + \frac{33}{m}\right) x$.

Remarque. Comme cette lunette devient si longue, quoiqu'on réussisse parfaitement dans la construction des verres; elle deviendra excessive, si l'on y commet la moindre faute. Et partant on feroit bien mal, si l'on vouloit faire usage de cette lunette.

TROISIEME HYPOTHESE.
où $\pi = \theta'$ & $\pi' = \theta$.

Cette hypothese fournit sans doute le plus grand champ apparent qu'il soit possible, en n'employant que trois verres: & on aura

$$\Phi = \frac{2\theta'}{m+1}, \quad \text{donc} \quad \pi = \pi' = \frac{m+1}{2}\Phi.$$

La lunette sera déterminée par les formules suivantes:

$$b = \frac{2(B+1)}{Bm-B-2}p; \; q = \frac{2B}{Bm-B-2}p; \; r = -\frac{B}{m}p; \; k = \frac{m+1}{2m}r;$$

$$AB = \frac{B(m+1)}{Bm-B-2}p \; ; \; BC = \frac{B(B+2)(m+1)}{m(Bm-B-2)}p,$$

& toute la longueur $$AC = \frac{B(B+m+2)(m+1)}{m(Bm-B-2)}p.$$

D'a-

D'abord il faut donc que $\frac{BC}{AB} = \frac{B+2}{m}$, ou $B+2$ soit un nombre positif, & ensuite aussi $\frac{Bp}{Bm-B-2}$. Enfin le champ apparent demande que k, & partant $-Bp$ soit une quantite positive. Donc, puisque Bp est négative, il faut que $B+2-Bm$ soit positive, par conséquent $B+2 > Bm$, & $B < \frac{2}{m-1}$. Donc les limites entre lesquelles le nombre B doit subsister sont $\frac{2}{m-1}$ & -2; d'où il sera ou positif ou négatif: dans le premier cas p doit être une quantite négative, dans l'autre une positive.

Voyons aussi s'il est possible de remplir la condition de la diverse réfrangibilité des rayons, laquelle est contenue dans cette équation:

$$\frac{(B+1)(m+1)}{Bm-B-2} + \frac{m+1}{2m} = 0, \text{ ou } B = -\frac{2m+2}{3m-1}.$$

Donc, puisque cette valeur est comprise entre les limites trouvées, la chose est possible au cas que p est une quantité positive.

Les conditions à remplir sont outre cela $\theta \geq \frac{B+1}{B} \cdot \frac{x}{p}$, & $\theta' > \frac{1}{B} \cdot \frac{x}{p}$, où il faut remarquer, que θ ne sauroit être plus petit que θ'. Enfin la confusion de ces lunettes est:

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{2(B+1)^2[\lambda'(B+1)^2+\nu B]}{B^3(B+2-Bm)} - \frac{\lambda''}{B^3 m}\right).$$

Premier cas, p *positif &* B *négatif.*

Soit donc $B = -n$, & le nombre n doit être contenu entre les limites 0 & 2. Les déterminations de ces lunettes sont

$B =$

$B = -n : q = \frac{2np}{mn - n + 2}$; $r = \frac{np}{m}$; & $k = \frac{m+1}{2m} r$;

$$AB = \frac{n(m+1)}{mn - n + 2} p \; ; \quad BC = \frac{n(2-n)(m+1)}{m(mn-n+2)} p \; ;$$

& toute la longueur $AC = \frac{n(m-n+2)(m+1)}{m(mn-n+2)} p$,

ensuite $\theta > \frac{n-1}{n} . \frac{x}{p}$ & $\theta' > \frac{1}{n} . \frac{x}{p}$.

Or la confusion est exprimée en sorte

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{2\lambda'(n-1)^4 - 2\nu n(n-1)^2}{n^3(mn-n+2)} + \frac{\lambda''}{n^3 m}\right),$$

& si l'on veut éviter la confusion des couleurs, on n'a qu'à prendre $n = \frac{2m-2}{3m-1}$.

XI Espece, posant $n = 2$.

Cette espece donne $B = -2$; $q = \frac{2p}{m}$; $r = \frac{2p}{m}$; & $k = \frac{m+1}{2m} r$;

$AB = \frac{m+1}{m} p$; $BC = 0$ & $AC = \frac{m+1}{m} p$; & $\theta = \theta' > \frac{1}{2} . \frac{x}{p}$,

or la confusion sera $\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda' - 2\nu}{8m} + \frac{\lambda''}{8m}\right)$,

laquelle ne pouvant évanouïr, on mettra $\lambda = 1$, & pour que les deux verres QQ & RR admettent la plus grande ouverture, on fera l'un & l'autre également convexe des deux côtés, d'où l'on aura

$\lambda'' = 1,6298$; & $\sqrt{(\lambda' - 1)} = \frac{2,15493}{0,90513} = 2,38080$, donc

$\lambda' = 6,6682$, de sorte que la confusion résulte $= \frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(1 + \frac{0,9791}{m}\right)$,

& partant on prendra $p = 30 x \sqrt[3]{(m + 0,9791)}$.

Ayant

Ayant donc pris $x = my$, le premier verre ſe conſtruira en ſorte

le rayon de ſa face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,61448\,p \\ \text{de derrière} = 5,24164\,p \end{cases}$

à la diſtance $AB = \left(1 + \frac{1}{m}\right)p$ on placera les deux verres QQ & RR joints enſemble, tous les deux étant égaux entr'eux, & également convexes de part & d'autre, leur diſtance de foyer étant $r = \frac{2p}{m}$, le rayon de leur courbure ſera $= \frac{11}{5} r = 2,2\,r$, & le demi-diametre du champ apparent $\Phi = \frac{2\theta'}{m+1} = \frac{2292}{m+1}$ minutes, prenant $\theta = \theta' = \frac{1}{3}$.

Remarque. Cette lunette ne diffère des ordinaires à deux verres, qu'en ce qu'on ſe ſert ici d'un oculaire double, qui double auſſi le diametre du champ apparent. Outre cela cette lunette devient auſſi tant ſoit peu plus courte, puisque pour les ordinaires, où le verre oculaire eſt également convexe des deux côtés, il faut prendre $p = 30\,x \sqrt[3]{(m + 1,6298)}$; or cette différence ne ſauroit être ſenſible, à moins que les verres ne ſoient exactement conſtruits ſur les régles données.

XII Eſpece, poſant n $= \frac{3}{2}$.

Pour cette eſpece nous aurons :

$B = -\frac{3}{2}$; $q = \frac{6p}{3m+1}$; $r = \frac{3p}{2m}$; $k = \frac{m+1}{2m} r$; $\theta > \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{p}$; $\theta' > \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{p}$

$AB = \frac{3(m+1)p}{3m+1}$; $BC = \frac{3(m+1)p}{2m(3m+1)}$; $AC = \frac{3(m+1)(2m+1)}{2m(3m+1)} p$,

& la confuſion : $\frac{\mu m x^6}{4p^3}\left(\lambda + \frac{2\lambda' - 12\nu}{27(3m+1)} + \frac{8\lambda''}{27m}\right)$.

Mais

Mais, pour obtenir le plus grand champ apparent, il faut que les deux verres QQ & RR soient également convexes des deux côtés, & tant le rayon des deux faces du verre $QQ = \frac{11}{10}q$, & du verre $RR = \frac{11}{10}r$. Alors on aura $\lambda'' = 1,6298$, & pour le verre QQ

$$\mathcal{V}(\lambda' - 1) = \frac{1,43662(1-B)}{2.0,90513(1+B)} = 0,39680 \text{ \& } \lambda' = 16,7450$$

donc la confusion

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{1,1367}{3m+1} + \frac{0,4829}{m}\right) = \frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{0,8618}{m} - \frac{0,1263}{mm}\right),$$

on prendra donc $\lambda = 1$, &

$$p = 30x\sqrt[3]{\left(m + 0,8618 - \frac{0,1263}{m}\right)},$$

& on aura pour la construction du verre PP

le rayon de la face $\begin{cases}\text{de devant} = 0,61448\,p \\ \text{de derrière} = 5,24164\,p.\end{cases}$

Or, si m est un nombre médiocrement grand, on connoitra plus aisément les mesures de ces lunettes par les formules suivantes

$$q = \frac{2p}{m} - \frac{2p}{3mm}\ ;\ r = \frac{3p}{2m}\ ;\ AB = \left(1 + \frac{2}{3m} - \frac{2}{9mm}\right)p\ ;$$

$$BC = \left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{3mm}\right)p\ ;\ \text{donc } AC = \left(1 + \frac{7}{6m} + \frac{1}{9mm}\right)p,$$

& partant cette lunette est un peu plus longue, qu'une de deux verres, si p a la même valeur, mais ici elle peut être prise un peu plus petite.

XIII *Espece, posant* n = 1.

Cette position fournit les déterminations suivantes :

$$B = -1;\ q = \frac{2p}{m+1};\ r = \frac{p}{m};\ k = \frac{m+1}{2m}r;\ \theta > 0;\ \theta' > \frac{x}{p};$$

$$AB = p;\ \ BC = \frac{p}{m}\ \ \&\ \ AC = \left(1 + \frac{1}{m}\right)p.$$

Le second verre QQ se trouve donc ici précisément dans le foyer commun des verres PP & RR, & ne change rien dans la confusion, qui est

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda''}{m}\right).$$

Donc on prendra $\lambda = 1$, & afin qu'on obtienne le plus grand champ, on fera les deux verres QQ & RR également convexes des deux côtés, d'où l'on aura $\lambda'' = 1,6298$.

Et partant, ayant pris $x = my$, on posera $p = 30x\sqrt[3]{(m+1,6298)}$, & pour le verre objectif PP on aura

le rayon de la face $\begin{cases}\text{de devant} = 0,61448\,p \\ \text{de derrière} = 5,24164\,p.\end{cases}$

Précisément au foyer de ce verre, à la distance $AB = p$, on mettra le verre QQ dont la distance de foyer $q = \frac{2p}{m+1}$, & le rayon de chaque face $= \frac{11}{10}q$. Derrière ce verre à la distance $BC = \frac{p}{m}$, on mettra l'oculaire RR, dont la distance de foyer $r = \frac{p}{m}$, & le rayon de chaque face $= \frac{11}{10}r$. On donnera à ces deux verres QQ & RR la plus grande ouverture, dont leur figure est susceptible, & si l'on prend $\theta = \theta' = \frac{1}{3}$ le demi-diametre du champ apparent sera $= \frac{2292}{m+1}$ minutes.

Re-

Remarque. On transformera donc aisément une lunette ordinaire de deux verres dans cette espece, en plaçant au foyer commun des deux verres un troisième verre convexe, dont la distance de foyer soit à peu près double de celle du verre oculaire RR; par ce moyen on doublera le diametre du champ apparent, & en même tems la distance de l'œil derrière le verre oculaire sera réduite à la moitié.

XIV Espece, posant $n = \frac{2(m-1)}{3m-1}$.

Cette espece contient les lunettes, où la confusion des couleurs évanouït: ayant donc $mn - n + 2 = \frac{2m(m+1)}{3m-1}$ les déterminations seront

$$B = -\frac{2(m-1)}{3m-1}; \quad q = \frac{2(m-1)p}{m(m+1)}; \quad r = \frac{2(m-1)p}{m(3m-1)}; \quad k = \frac{m+1}{2m}r$$

$$AB = \frac{m-1}{m}p; \quad BC = \frac{4(m-1)}{m(3m-1)}p; \quad AC = \frac{3(mm-1)}{m(3m-1)}p,$$

& partant le verre du milieu est ici placé un peu avant le foyer de l'objectif. Or la confusion est

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda'(m+1)^3}{8m(m-1)^3} - \frac{\nu(m+1)(3m-1)}{4m(m-1)^2} + \frac{\lambda''(3m-1)^3}{8m(m-1)^3}\right),$$

où si l'on fait les verres QQ & RR également convexes des deux côtés pour pouvoir mettre $\theta = \theta' = \frac{1}{3}$, on aura $\lambda'' = 1,6298$ & $\lambda' = 16,7450$. Donc, si nous regardons le nombre m comme très grand, & que nous posions $\lambda = 1$, la confusion sera

$$\frac{\mu x^3}{4p^3}(m + 7,5191) \quad \text{donc} \quad p = 30x\sqrt[3]{(m + 7,5191)}:$$

ayant pris $x = my$; alors la construction du verre objectif sera

le rayon de sa face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,61448\,p \\ \text{de derrière} = 5,24164\,p. \end{cases}$

Der-

Derrière ce verre à la distance $AB = \left(1 - \frac{1}{m}\right)p$, on placera le verre QQ, dont la distance de foyer $q = \frac{2(m-1)}{m(m+1)}p = \left(\frac{2}{m} - \frac{4}{mm}\right)p$; & le rayon de chaque face $= \frac{11}{10}q$: après celui à la distance $BC = \left(\frac{4}{3m} - \frac{8}{9mm}\right)p$: on mettra le verre RR dont la distance de foyer $r = \frac{2(m-1)}{m(3m-1)}p = \left(\frac{2}{3m} - \frac{4}{9mm}\right)p$, & le rayon de chaque face $= \frac{11}{10}r$. On aura donc $BC = 2r$, & la longueur de toute la lunette sera $= \left(1 + \frac{1}{3m} - \frac{8}{9mm}\right)p$, & partant un peu plus courte, qu'au cas de deux verres.

Second cas, p *négatif & B positif.*

Nous n'avons qu'à prendre p & n négatifs dans le cas précédent, & nous aurons :

$$B = n;\ q = \frac{2np}{2+n-mn};\ r = \frac{np}{m};\ k = \frac{m+1}{2m}r;\ \theta > \frac{n+1}{n}.\frac{x}{p};\ \theta' > \frac{1}{n}.\frac{x}{p};$$

$AB = \frac{n(m+1)}{2+n-mn}p$; $BC = \frac{n(2+n)(m+1)}{m(2+n-mn)}p$, donc toute la longueur de la lunette $AC = \frac{n(m+n+2)(m+1)}{m(2+n-mn)}p$. Or la confusion sera

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{2\lambda'(n+1)^4 - 2\nu n(n+1)^2}{n^3(2+n-mn)} - \frac{\lambda''}{n^3 m}\right),$$

Or il faut qu'il soit $n < \frac{2}{m-1}$, & $n > 0$.

XV Espece, posant $n = \frac{3}{2(m-1)}$.

Puisque $n = \frac{3}{2(m-1)}$, on aura $2 + n - mn = \frac{1}{2}$, donc

$$B = \frac{3}{2(m-1)}\ ;\ q = \frac{6}{m-1}p\ ;\ r = \frac{2p}{2m(m-1)}\ ;\ k = \frac{m+1}{2m}r;$$

$$AB = \frac{3(m+1)}{m-1}p;\ BC = \frac{3(4m-1)(m+1)}{2m(m-1)^2}p;\ \theta > \frac{2m+1}{3}.\frac{x}{p};\ \theta' > \frac{2m-2}{3}.\frac{x}{p},$$

& la longueur de la lunette $AC = \frac{3(m+1)(2mm+2m-1)}{2m(m-1)^2}p.$

Or la confusion étant

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{2\lambda'(2m+1)^4}{27(m-1)} - \frac{4}{9}\nu(2m+1)^2 - \frac{8\lambda''(m-1)^3}{27m}\right)$$

devient si excessivement grande, qu'on ne sauroit en aucune maniere faire usage de cette espece. Et il en est de même de toutes les autres valeurs, qu'on pourroit donner à n.

QUATRIEME HYPOTHESE

$B + 1 = 0$.

Cette hypothese comprend en général tous les cas, où le second verre se trouve au foyer de l'objectif, & on aura :

$$B = -1\ ;\ b = 0;\ q = \frac{\Phi}{\pi}p;\ r = \frac{p}{m};\ AB = p;\ BC = \frac{p}{m};\ \&\ k = \frac{\pi'}{\Phi}.\frac{r}{m}$$

& la confusion

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda''}{m}\right) \quad \text{donc} \quad p = 30x\sqrt[3]{(\lambda m + \lambda'')}$$

tout comme dans le cas de deux verres ; & le verre oculaire se trouve aussi à la même distance. Le verre du milieu QQ ne change rien, ni dans la multiplication, ni dans la confusion : mais son effet consiste dans le champ apparent, & le lieu de l'œil. Si le verre du milieu étoit con-

concave, & partant π négatif, le champ apparent en feroit diminué, or s'il eſt convexe, & plus grand que l'oculaire, il l'augmente, & s'il eſt plus petit, il le diminue, ce qu'on verra plus clairement par les cas ſuivant :

I. $\pi = 0$; $\pi' = (m+1)\Phi$; donc $\Phi = \frac{\pi'}{m+1} = \frac{\theta'}{m+1}$

Or $q = \infty$; & $k = \frac{m+1}{m} r$

II. $\pi = \frac{m+1}{10} \Phi$; $\pi' = \frac{9(m+1)}{10} \Phi$; donc $\Phi = \frac{10\theta'}{9(m+1)}$

Or $q = \frac{10p}{m+1}$; & $k = \frac{9(m+1)}{10m} r$

III. $\pi = \frac{m+1}{5} \Phi$; $\pi' = \frac{4(m+1)}{5} \Phi$; donc $\Phi = \frac{5\theta'}{4(m+1)}$

Or $q = \frac{5p}{m+1}$; & $k = \frac{4(m+1)}{5m} r$

IV. $\pi = \frac{3(m+1)}{10} \Phi$; $\pi' = \frac{7(m+1)}{10} \Phi$; donc $\Phi = \frac{10\theta'}{7(m+1)}$

Or $q = \frac{10p}{3(m+1)}$; & $k = \frac{7(m+1)}{10m} r$

V. $\pi = \frac{2(m+1)}{5} \Phi$; $\pi' = \frac{3(m+1)}{5} \Phi$; donc $\Phi = \frac{5\theta'}{3(m+1)}$

Or $q = \frac{5p}{2(m+1)}$; & $k = \frac{3(m+1)}{5m} r$

V. $\pi = \frac{m+1}{2} \Phi$; $\pi' = \frac{m+1}{2} \Phi$; donc $\Phi = \frac{2\theta'}{m+1} = \frac{2\theta}{m+1}$

Or $q = \frac{2p}{m+1}$; & $k = \frac{m+1}{2m} r$

VI.

VI. $\pi = \frac{3(m+1)}{5}\Phi$; $\pi' = \frac{2(m+1)}{5}\Phi$; donc $\Phi = \frac{5\theta}{3(m+1)}$

Or $q = \frac{5p}{3(m+1)}$; & $k = \frac{2(m+1)}{5m}r$

VII. $\pi = \frac{7(m+1)}{10}\Phi$; $\pi' = \frac{3(m+1)}{10}\Phi$; donc $\Phi = \frac{10\theta}{7(m+1)}$

Or $q = \frac{10p}{7(m+1)}$; & $k = \frac{3(m+1)}{10m}r$

VIII. $\pi = \frac{4(m+1)}{5}\Phi$; $\pi' = \frac{m+1}{5}\Phi$; donc $\Phi = \frac{5\theta}{4(m+1)}$

Or $q = \frac{5p}{4(m+1)}$; & $k = \frac{m+1}{5m}r$

IX. $\pi = \frac{9(m+1)}{10}\Phi$; $\pi' = \frac{m+1}{10}\Phi$; donc $\Phi = \frac{10\theta}{9(m+1)}$

Or $q = \frac{10p}{9(m+1)}$; & $k = \frac{m+1}{10m}r$

X. $\pi = (m+1)\Phi$; $\pi' = 0$; donc $\Phi = \frac{\theta}{m+1}$

Or $q = p$; & $k = 0r$.

Remarque. Si nous regardons au champ apparent les eſpeces XII, XIII, & XIV, paroiſſent les plus avantageuſes pour la pratique, mais ſi nous regardons au racourciſſement des lunettes, les eſpeces de la première hypotheſe méritent la preference, où les deux verres PP & QQ ſont immédiatement joints enſemble. Mais, puiſque les verres ont toujours quelque épaiſſeur, qui rendent cette hypotheſe impraticable à la rigueur, il ſera bon de déveloper auſſi de telles hypotheſes, où l'intervalle entre les deux premieres verres PP & QQ devienne fort petit, ce qui arrive lorſqu'on ſuppoſe $\pi = \frac{1}{m}$, ou en général $\pi = \frac{\alpha}{m}$.

CIN-

CINQUIEME HYPOTHESE

ou $\pi = \frac{\alpha}{m}\phi$ & $\pi = \frac{mm + m - \alpha}{m}\phi$.

Puisque π eſt ſuppoſé fort petit, on aura $\pi' = \theta'$, & partant $\phi = \frac{m\theta'}{mm + m - \alpha}$. Ayant donc $\frac{\pi}{\phi} = \frac{\alpha}{m}$ & $\frac{\pi'}{\phi} = \frac{mm + m - \alpha}{m}$ les déterminations de ces lunettes ſont :

$$q = \frac{Bm}{B\alpha - Bm - m}p;\ r = -\frac{Bp}{m};\ k = \frac{mm + m - \alpha}{mm}r;$$

$$AB = \frac{B\alpha}{B\alpha - Bm - m}p;\ BC = \frac{B(B+1)m}{B\alpha - Bm - m}p - \frac{Bp}{m};$$

ou $$BC = \frac{B[(B+1)m(m+1) - B\alpha]}{m(B\alpha - Bm - m)}p.$$

Il faut donc qu'il ſoit $(B+1)m(m+1) > B\alpha$, & $\frac{B\alpha p}{B\alpha - Bm - m}$ une quantité poſitive. Or, afin que k en ſoit auſſi une, la quantité $-Bp$ doit être poſitive, & partant auſſi $\frac{-\alpha}{B\alpha - Bm - m}$, ou bien $(B+1)m - B\alpha$: mais ſi celle-cy eſt poſitive, la premiere condition y eſt déjà compriſe. Les conditions principales à remplir ſont donc :

$-Bp > 0$ & $(B+1)m > B\alpha$, & la confuſion

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{(B+1)^2 m[\lambda'(B+1)^2 + \nu B]}{B^3[(B+1)m - B\alpha]} - \frac{\lambda''}{B^3 m}\right).$$

Premier cas, p *positif & B négatif.*

Posons $B = - n$ pour avoir :

$$q = \frac{mnp}{m + an - mn} ; \quad r = \frac{np}{m} ; \quad k = \frac{mm + m - \alpha}{mm} r ;$$

$$AB = \frac{\alpha np}{m + \alpha n - mn} ; \; BC = \frac{n[(1-n)m(m+1) + \alpha n]}{m(m + \alpha n - mn)} p ;$$

$$\theta > \frac{n-1}{n} \cdot \frac{x}{p} \quad \& \quad \theta' > \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{p} .$$

Il faut donc qu'il soit $n < \frac{m}{m - \alpha}$, & $n < \frac{m(m+1)}{m(m+1) - \alpha}$; mais on doit prendre $n < 1$, puisque le cas $n = 1$ ne donne pas l'intervalle AB petit. Ensuite la confusion est :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{(1-n)^2 m[\lambda'(1-n)^2 - \nu n]}{n^3[(1-n)m + \alpha n]} + \frac{\lambda''}{n^3 m}\right),$$

où nous n'avons qu'une espece à considérer, puisque n doit être pris entre les limites 1 & 0.

XVI Espece, où n $= \frac{1}{2}$.

Nous aurons donc pour les déterminations de cette espece

$$B = -\frac{1}{2} ; \; q = \frac{m}{m + \alpha} p ; \; r = \frac{p}{2m} ; \; k = \frac{2m(m+1) - \alpha}{2mm} r ;$$

$$AB = \frac{\alpha p}{m + \alpha} ; \; BC = \frac{m(m+1) + \alpha}{2m(m + \alpha)} p ; \; \theta > \frac{x}{p} ; \; \& \; \theta' > \frac{2x}{p},$$

& la confusion $\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda' m - 2\nu m}{m + \alpha} + \frac{8\lambda''}{m}\right)$.

Pour la rendre aussi petite qu'il est possible, posons $\lambda = 1$, & $\lambda' = 1$, & prenons $p = 30x\sqrt[3]{\left(\frac{1,53462\, mm + \alpha m}{m + \alpha} + 8\lambda''\right)}$,

ou

ou à peu près $p = 30x\sqrt[3]{(1,53462m - 0,53462\alpha + 8\lambda'')}$,
d'où la longueur de toute la lunette devient :

$$AC = \frac{m(m+1)+\alpha(2m+1)}{2m(m+\alpha)}p = \frac{m+1+\alpha}{2m}p, \text{ à peu près.}$$

Prenons pour α une fraction assez petite, pour que les deux verres PP & QQ se touchent presque : & que le verre oculaire RR soit également convexe des deux côtés : on aura $\lambda'' = 1,6298$. Donc, après avoir pris $x = my$, il faut prendre

$$p = 60x\sqrt[3]{(0,19183m + 1,6298 - 0,06683\alpha)},$$

& le verre objectif PP doit être formé en sorte :

$$\text{rayon de la face}\begin{cases}\text{de devant} = 0,61448p\\ \text{de derrière} = 5,24164p.\end{cases}$$

Après ce verre à la distance $AB = \frac{\alpha p}{m+\alpha}$ on placera le verre QQ, dont la distance de foyer soit $q = \frac{m}{m+\alpha}$, & la construction

$$\text{le rayon de la face}\begin{cases}\text{de devant} = +\ 0,32637q\\ \text{de derrière} = -\ 0,80267q.\end{cases}$$

Enfin, après ce verre, à la distance $BC = \frac{m(m+1)+\alpha}{2m(m+\alpha)}p$, on mettra le verre oculaire RR, dont la distance de foyer $r = \frac{p}{2m}$, qui soit également convexe des deux côtés, & le rayon de chacun $= \frac{11}{10}r$.

Remarque. Cette lunette est en même tems la plus courte dans son espece, & convient avec l'espece V: & puisque les deux verres PP & QQ sont fort à peu près les mêmes que là, on voit qu'un petit éloignement entre ces deux verres ne nuit rien dans les avantages de ces lunettes.

Second cas, p *négatif* & B *positif*.

Nous n'avons qu'à changer les signes des lettres p & n dans les formules du cas précédent pour avoir

$$B = n\,;\ q = \frac{mnp}{m(n+1)-\alpha n}\,;\ r = \frac{np}{m}\,;\ k = \frac{m(m+1)-\alpha}{mm}\,r\,;$$

$$AB = \frac{\alpha np}{m(n+2)-\alpha n}\,;\ BC = \frac{n\left[(n+1)m(m+1)-\alpha n\right]p}{m\left[(n+1)m-\alpha n\right]}\,;$$

$$\theta > \frac{n+1}{n}.\frac{x}{p} \quad \& \quad \theta' > \frac{1}{n}.\frac{x}{p}\,,$$

d'où il est clair que les distances AB & BC sont toujours positives, pourvû que α soit un nombre plus petit que m. Or la confusion est

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda - \frac{m(n+1)^2\left[\lambda'(n+1)^2+\nu n\right]}{n^3\left[(n+1)-\alpha n\right]} - \frac{\lambda''}{n^3 m}\right),$$

laquelle peut aisément être réduite à rien. Mais il est aisé de voir qu'on en tire les mêmes déterminations que s'il y avoit $\alpha = 0$, de sorte que les especes de la premiere hypothese puissent subsister quoique les deux verres PP & QQ ne soient pas immédiatement joints ensemble, mais qu'on laisse entr'eux quelque petit intervalle. Et partant il seroit superflu, d'en rapporter des exemples.



Mé-